بسم الله الرحمن الرحیم

## نمونه رایگان جزوه

# ریاضی مدیریت

## (فصل چهارم)



تالیف: دکتر حسن رضاپور

**پشتیبانی:**

**www.pourshafi.com**

# فصل چهارم:

## مشتق؛

**تعریف:** تابع $f(x)$ در نقطه $x_0$ مشتق‌پذیر است هرگاه:

۱) $f(x)$ در $x_0$ پیوسته باشد.

۲) حد روبرو موجود باشد $f'(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

**تذکر:**

۱) به جای حد در شماره ۲ می‌توان از $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x_0)}{h}$ استفاده نمود.

۲) $(\dfrac{m+2}{r})f'(x_0)=\lim\limits_{n\to 0}\dfrac{f(x_0+mh)-f(x_0-nh)}{rh}$

**مثال۱.اگر** $f(x)=\sqrt[3]{(x^2-2x)^2}$ **حاصل** $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(4+h)-f(4)}{h}$ **کدام است؟ (حسابداری)**

۱) $\frac{1}{3}$　　۲) $\frac{2}{3}$　　۳) $\frac{1}{2}$　　۴) ۲

$$f'(x)=\frac{2(x^2-2x)(2x-2)}{3\sqrt[3]{(x^2-2x)^4}}\Rightarrow f'(4)=\frac{2(8)(6)}{3\sqrt[3]{8^4}}=\frac{2(8)(6)}{3(8)(4)}=2$$

### مشتق چپ و راست:

مشتق چپ : $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0^-)$

مشتق راست : $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0^+)$

**تذکر:** $f(x)$ در $x_0$ مشتق‌پذیر است هرگاه:

۱) در این نقطه پیوسته باشد.

۲) مشتق چپ= مشتق راست

**مثال۲. تابع با ضابطه** $f(x)=\begin{cases}3-x & x\le 2\\ \frac{1}{x}x^2-1 & x>2\end{cases}$ **در** $x=2$ **چگونه است؟ (مدیریت)**

۱) ناپیوسته　　۲) فاقد حد　　۳) مشتق‌پذیر　　۴) مشتق‌ناپذیر

گزینه ۴ صحیح است.

مشتق چپ : $(3-x)'=-1\Rightarrow f'(2^-)=-1$

مشتق راست : $(\frac{1}{2}x^2-1)'=-1\Rightarrow f'(2^+)=2$

مشتق چپ ≠ مشتق راست ⇐ مشتق‌ناپذیر

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{1}{2}x^2-1=1\\ \lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}3-x=1\\ f(2)=1\end{array}\right\}$$
f در $x=2$ پیوسته است.

**قواعد مشتق‌گیری:**

۱) $f(x)=c \Rightarrow f'(x)=0$

۲) $f(x)=u^n(x) \Rightarrow f'(x)=nu'(x)u^{n-1}(x)$ 	$y=(3x^2-8x)^4 \to y'=4(6x-8)(3x^2-8x)^3$

۳) $f(x)=\sqrt[m]{u^n} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{nu'}{m\sqrt[m]{u^{n-m}}}$

**مثلثاتی:**

۴) $f(x)=\cos u \Rightarrow f'(x)=-u'\sin u$

۵) $f(x)=\sin u \Rightarrow f'(x)=u'\cos u$

۶) $f(x)=\tan u \Rightarrow f'(x)=u'(1+\tan^2 u)$

۷) $f(x)=\cot gu \Rightarrow f'(x)=-u'(1+\cot g^2 u)$

$f(x)=u(x).v(x) \Rightarrow f'(x)=u'v+v'u$ , $f(x)=\dfrac{u}{v} \Rightarrow f'=\dfrac{u'v-v'u}{u^2}$

۸) $f(x)=\sec u=\dfrac{1}{\cos u} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{u'\sin u}{\cos^2 u}=u'\sin u\sec^2 u$

**معکوس مثلثاتی:**

۹) $f=\mathrm{Arc}\sin u \Rightarrow f'(x)=\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

۱۰) $f(x)=\mathrm{Arc}\cos u \Rightarrow f'(x)=\dfrac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$

۱۱) $f(x)=\mathrm{Arc}\tan u \Rightarrow f'(x)=\dfrac{u'}{1+u^2}$

۱۲) $f(x)=\mathrm{Arc}\cot gu \Rightarrow f'(x)=\dfrac{-u'}{1+u^2}$

**هیپربولیک:**

۱۳) $f(x)=\sinh(u) \Rightarrow f'(x)=u'\cosh(u)$

۱۴) $f(x)=\cosh(u) \Rightarrow f'(x)=u'\sinh(u)$ 	منفی ندارد

۱۵) $f(x)=\tanh(v) \Rightarrow f'(x)=u'(1-\tanh^2(u))$

۱۶) $f(x)=\cot gh(v) \Rightarrow f'(x)=u'(1-\cot gh^2(u))$

**توابع نمایی و لگاریتمی:**

۱۷) $f(x)=a^u \Rightarrow f'(x)=u'a^u.\ln a$ 	$^{**} f(x)=e^u \Rightarrow f'(x)=u'e^u$

۱۸) $f(x)=\log_a^u \Rightarrow f'(x)=\dfrac{u'}{u.\ln a}$ 	$^{**} f(x)=\ln u \Rightarrow f'(x)=\dfrac{u'}{u}$

۱۹) $f(x)=|u| \Rightarrow f'(x)=\dfrac{u'u}{|u|}, u\neq 0$

**مثال ۳.** مشتق عبارت $y=(1+\cos 2x)\tan^2 x$ در $x=\dfrac{\pi}{12}$ کدام است؟ (حسابداری و مدیریت ۹۳)

۱) ۱ 	۲) ۱- 	۳) $\dfrac{1}{2}$ 	۴) $-\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{1+\cos 2x}{2}=\cos^2 x \to y=2(\cos^2 x)\tan^2 x=2\sin^2 x \to$

$$y' = 4\sin x\cos x = 2(\sin 2x)\Big|_{x=\frac{\pi}{12}} = 2\times\frac{1}{2} = 1$$

**مثال۴. درتابع** $f(x)=\begin{cases} ae^{-x} & x\geq 0 \\ x+\dfrac{b}{1-x} & x<0 \end{cases}$ **مقدار** $f'(0)$ **موجود است ab کدام است؟ (مدیریت و حسابداری ۸۶)**

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۲

۱) باید f در صفر پیوسته باشد.

۲) مشتق چپ f در صفر = مشتق راست f در صفر

بررسی شرط پیوستگی $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} ae^{-x} = a \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x+\dfrac{b}{1-x} = b \end{cases} \Rightarrow a=b \qquad (1)$

بررسی شرط مشتق‌پذیر $\begin{cases} f'(0^+) = (ae^{-x})' = -ae^{-x}\Big|_{x=0} = -a \\ f'(0^-) = (x+\dfrac{b}{1-x})' = (1+\dfrac{b}{(1-x)^2})\Big|_{x=0} = 1+b \end{cases} \qquad -a = 1+b(2)$

$(1),(2) \quad \begin{matrix} a-b=0 \\ -a-b=1 \end{matrix} \qquad b=-\frac{1}{2}, a=-\frac{1}{2} \Rightarrow ab=\frac{1}{4}$

**قاعده مشتق تابع مرکب:**

$$y = fog(x) = f(g(x)) \Rightarrow y' = g'(x).f'(g(x))$$

**مثال۵. اگر f تابعی حقیقی و مشتق‌پذیر باشد و داشته باشیم** $g(x)=f(xf(x))$ **آنگاه** $g'(0)$ **برابر است با:**

۱) $f'(0)+f(0)$ ۲) $f'(0).f(0)$ ۳) $(f'(0))^2$ ۴) ۰

$g'(x) = (f(xf(x)))' = (xf(x))'.f'(xf(x)) = (f(x)+xf'(x))(f'(xf(x)))$

$g'(0) = (f(0)+0\times f'(0))(f'(0\times f(0))) = f(0)(f'(0))$ گزینه ۲ صحیح است.

**قاعده مشتق‌گیری زنجیره‌ای**

$$y=f(u), y=g(t), t=h(x)$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dt}.\frac{dt}{dx}$$

**مثال۶.اگر** $x=\sqrt[3]{t}, U=\sqrt{x+3}, y=\sqrt{u+2}$ **مقدار** $y'_t$ **به ازای** $t=1$ **کدام است؟ حسابداری**

۱) $\frac{1}{48}$ ۲) $\frac{1}{24}$ ۳) $\frac{1}{16}$ ۴) ۱

$t=1 \Rightarrow x=1 \Rightarrow u=2$

$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}.\frac{dx}{dt} = (\sqrt{u+2})'_u.(\sqrt{x+3})'_x.(\sqrt[3]{t})'_t =$

$$=\frac{1}{2\sqrt{u+2}}.\frac{1}{2\sqrt{x+3}}.\frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}\Big|_{t=1}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}.\frac{1}{3}=\frac{1}{48}$$

**مثال ۷. اگر** $u=\sqrt{x^2-3}, y=e^{\frac{1}{u}}$ **مقدار** $\frac{dy}{dx}$ **به ازای** $x=2$ **کدام است؟ (حسابداری)**

۱) $\frac{1}{2}e$ ۲) $2e$ ۳) $-2e$ ۴) $-\frac{1}{2}e$

$x=2\Rightarrow u=1$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}=(-\frac{1}{v^2}.e^{\frac{1}{u}})\times(\frac{2x}{2\sqrt{x^2-3}})_{x=2}=(-e)(\frac{2}{1})=-2e$$

**مشتق پارامتری:** اگر y,x هر دو برحسب متغیر سوی برحسب t بیان شوند یعنی $\begin{cases}x=f(t)\\y=g(t)\end{cases}$ آنگاه:

$$y'_x=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)}\quad,\quad y''_x=\frac{g''f'-f''g'}{f'^3}$$

**مثال ۸. اگر** $x=t^2+t, y=t^3-3t$ **مقدار** $\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}$ **به ازای** $t=1$ **را بیابید. (حسابداری و مدیریت ۸۶)**

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)}=\frac{3t^2-3}{2t+1}\Big|_{t=1}=0$$

$$\frac{d^2_y}{dx^2}=\frac{g''(t).f'(t)-f''(t).g'(t)}{(f'(t))^3}=\frac{6t(2t+1)-2(3t^2-3)}{(2t+1)^3}\Big|_{t=1}=\frac{2}{3}$$

**نکته: (اثبات فرمول** $y''_x=\frac{g''f'-f''g'}{f'^3}$)

$$\frac{d^2_y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})=\frac{d}{dx}(\frac{g'(t)}{f'(t)})=\frac{du}{dx}=\frac{du}{dt}.\frac{dt}{dx}$$

$$=\frac{\frac{du}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{g''f'-f'g''}{f'^2}}{f'}=\frac{g_1''f_1'-f_1'g_1''}{f'^3}$$

**مثال ۹. اگر** $\begin{cases}x=t^2f(t)\\y=\ln tg(t)\end{cases}$ **آنگاه** $y''_x$ **کدام است؟**

۱) $t^{-\frac{1}{3}}$ ۲) $-\frac{1}{2t^3}$ ۳) $-\frac{1}{2t^4}$ ۴) $\frac{1}{t^2}$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{g'(r)}{f'(t)}=\frac{\frac{1}{t}}{2t}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{2}t^{-2}$$

$$y''=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{du}{dx}=\frac{\frac{du}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-t^{-3}}{2t}=-\frac{1}{2t^4}$$

**مشتق نمایی:** موارد استفاده در حالات زیر قرار دارند:

۱) توابع به فرم $y=f(x)^{g(x)}$

۲) عوامل تابع زیاد باشند و بین آنها ضرب یا تقسیم باشد.

**۱) توابع به فرم** $y=f(x)^{g(x)}$: برای مشتق‌گیری از دوطرف $\ln$ می‌گیریم سپس عمل مشتق‌گیری را اعمال می‌نمائیم.ادامه توضیح با مثال بعدی.

**مثال ۱۰. مشتق تابع $y=(x^2)^{x^2+1}$ در نقطه $x=1$ کدام است؟** (مدیریت صنعتی ۸۲– حسابداری آزاد ۸۶)

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۸ ۴) ۴

$$y=(x^2)^{x^2+1}\xrightarrow{\ln}\ln y=\ln(x^2)^{x^2+1}=x^2+1\ln x^2\xrightarrow{\text{مشتق}}\frac{y'}{y}=2x\ln x^2+\frac{(x^2+1)2x}{x^2}$$

$$\Rightarrow y'=y\left(4x\ln x+\frac{2(x^2+1)}{x}\right)=(x^2)^{x^2+1}\left(4x\ln x+\frac{2(x^2+1)}{x}\right)\Big|_{x=1}=\underline{\underline{4}}$$

**مثال۱۱. مشتق $y=x^{e^x}$ در $x=1$ کدام است؟**

۱) $e+1$ ۲) $e$ ۳) $-e$ ۴) $e-1$

$$y=x^{e^x}\Rightarrow\ln y=\ln x^{e^x}\Rightarrow\ln y=e^x\ln x\xrightarrow{\text{مشتق}}\frac{y'}{y}=e^x\ln x+\frac{e^x}{x}$$

$$\Rightarrow y'=y\left(e^x\ln x+\frac{e^x}{x}\right)=x^{e^x}\left(e^x\ln x+\frac{e^x}{x}\right)\Big|_{x=1}=e$$

**۲) عوامل زیاد باشند:**

**مثال ۱۲. از تابع زیر مشتق بگیرید.**

$$y=\frac{(x^2+1)^4(x+1)(2x-7)}{(x+1)^2(2x^2+x)^3}$$

$$\ln y=\ln\frac{(x^2+1)^4(x+1)(2x-7)}{(x+1)^2(2x^2+x)^3}=\ln(x^2+1)^4(x+1)(2x-7)-\ln(x+1)^2(2x^2+x)^3$$

$$=\ln(x^2+1)^4+\ln(x+1)+\ln(2x-7)-\ln(x+1)^2-\ln(2x^2+x)^3$$

$$=4\ln(x^2+1)+\ln(x+1)+\ln(2x-7)-2\ln(x+1)-3\ln(2x^2+x)=\ln y$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}}\frac{y'}{y}=\frac{8x}{x^2+1}+\frac{1}{x+1}+\frac{2}{2x-7}-\frac{2}{x+1}-\frac{6x}{2x^2+x}=\frac{y'}{y}\Rightarrow$$

$$y'=y\left(\frac{8x}{x^2+1}+\frac{1}{x+1}+\frac{2}{2x-7}-\frac{2}{x+1}-\frac{6x}{2x^2+x}\right)=$$

$$y'=\frac{(x^2+1)^4(x+1)(2x-7)}{(x+1)^2(2x^2+x)^3}\left(\frac{8x}{x^2+1}+\frac{1}{x+1}+\frac{2}{2x-7}-\frac{2}{x+1}-\frac{6x}{2x^2+x}\right)$$

**م مشتق‌گیری ضمنی:** مشتق تابع $y=f(x)$ یک رابطه صریح برحسب y,x که در یک طرف y و طرف دیگر تابعی بر حسب x است مورد مطالعه قرار دادیم. گاهی رابطه صریحی بین y,x نداریم در این موارد تمامی جملات را یک طرف تساوی برده و سمت دیگر صفر داریم. لذا $F(x,y)=0$ ظاهر می‌شود. آنگاه:

$$y'_x=-\frac{F'x}{F'y} \qquad , \qquad x'_y=-\frac{F'_y}{F'_x}$$

$F'_x$: یعنی مشتق‌گیری از عبارت F برحسب x که y را مثل عدد ثابت در نظر می‌گیریم.

$F'_y$: یعنی مشتق‌گیری از عبارت F برحسب y که x را مثل عدد ثابت در نظر می‌گیریم.

**مثال ۱۳. از رابطه** $x^2+2y^2-3xy+4x=8$**، مقدار** $\frac{dy}{dx}$ **در نقطه** $(2,1)$ **کدام است؟ (مدیریت)**

۱) ۱-　　۲) $\frac{3}{2}$　　۳) $\frac{5}{2}$　　۴) ۳

$$y'_x=-\frac{f_x}{f_y}=-\frac{2x-3y+4}{4y-3x}\bigg|_{(2,1)}=\frac{4-3+4}{4-6}=\frac{5}{2}$$

**مثال ۱۴. تابع ضمنی حقیقی** $e^x+e^y-xe^{2x}-e^{2y}-1=0$ **مفروض است.** $y'_x$ **در** $(0,0)$ **کدام است؟ (مدیریت)**

۱) ۰　　۲) ۲-　　۳) $\frac{1}{2}$　　۴) $-\frac{1}{3}$

$$y'_x=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{e^x-e^{2x}-2xe^{2x}}{e^y-2e^y}\bigg|_{(0,0)}=0$$

**مثال ۱۵. مشتق تابع** $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\dots}}}$ **برابر است با:**

۱) $y'=\frac{1}{2y+2}$　　۲) $y'=\frac{1}{y+1}$　　۳) $y'=\frac{1}{2y-1}$　　۴) $y'=\frac{1}{y-1}$

$$y=\sqrt{x+y}\Rightarrow y^2=x+y\Rightarrow y^2-x-y=0\Rightarrow y'_x=-\frac{-1}{2y-1}=\frac{1}{2y-1}$$

**مشتق یک تابع نسبت به تابع دیگر:** مشتق تابع f نسبت به تابع g برابرست با:

$$\frac{d(f(x))}{d(g(x))}=\frac{\frac{df(x)}{dx}}{\frac{dg(x)}{dx}}=\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

یعنی نسبت سرعت تغییرات f (نرخ تغییرات f) به صرعت تغییرات g

**مثال ۱۶. نرخ تغییر تابع** $\sqrt{x^2+3x}$ **نسبت به** $\frac{x}{x+1}$ **در** $x=1$ **کدام است؟**

۱) ۲　　۲) ۳　　۳) ۴　　۴) ۵

$$\frac{d(\sqrt{x^2+3x})}{d(\frac{x}{x+1})}=\frac{\frac{d(\sqrt{x^2+3x})}{dx}}{\frac{d(\frac{x}{x+1})}{dx}}=\frac{\frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x}}}{\frac{x+1-x}{(x+1)^2}}\Bigg|_{x=1}=\frac{\frac{5}{4}}{\frac{1}{4}}=5$$

**مثال۱۷. نرخ تغییر تابع $y=\ln(1+x^2)$ نسبت به تابع $g(x)=\ln(x+3)$ در $x=2$ برابر است با: (اقتصاد)**

۱) ۳　　۲) ۴　　۳) $\frac{8}{3}$　　۴) $\frac{5}{6}$

$$\frac{d(\ln(1+x^2))}{d(\ln(x+3))}=\frac{\frac{d(\ln(1+n^2))}{dx}}{\frac{d(\ln(x+3))}{dx}}$$

$$=\left.\frac{\frac{2x}{1+x^2}}{\frac{1}{x+3}}\right|_{x=2}=\frac{\frac{4}{5}}{\frac{1}{5}}=4$$

**مشتق تابع معکوس:**

به شرط: $f(a)=b$　　$(f^{-1})'(b)=\frac{1}{f'(a)}$

**مثال۱۸ : اگر $f(x)=x^3+x^2$ مقدار مشتق تابع معکوس در نقطه‌ای به طول ۱۲ واقع بر آن را بیابید.**

$(f^{-1})(12)=?=\frac{1}{f'(a)}$　　$f(a)=12$　　$\Rightarrow 12=x^3+x^2\Rightarrow x=2$

$f(x)=x^3+x^2\Rightarrow f'=3x^2+2x$

$$(f^{-1})'(12)=\frac{1}{f'(2)}=\frac{1}{\left.3x^2+2x\right|_{x=2}}=\frac{1}{16}$$

**مشتق مراتب بالاتر:** مشتق اول $f'$، مشتق دوم $f''$ و... و مشتق nام $f^{(n)}$

$$f(x)=\sin ax\Rightarrow f^n(x)=a^n\sin(ax+\frac{n\pi}{2})$$

$$f(x)=\cos ax\Rightarrow f^n(x)=a^n\cos(ax+\frac{n\mu}{2})$$

$$f(x)=ax^n+bx^{n-1}+\ldots+m\Rightarrow f^n(x)=an!$$

$$f(x)=e^{ax}\Rightarrow f^n(x)=a^ne^{an}$$

**مثال۱۹. مشتق nام $y=\sin x$ برابر است با:**

۱) $\cos(x+n\frac{\mu}{2})$　　۲) $(-1)^n\cos(x+\frac{n\mu}{2})$　　۳) $(-1)^n\sin(x+n\frac{\mu}{2})$　　۴) $\sin(x+n\frac{\mu}{2})$

با توجه به فرمول گزینه ۴ صحیح است. ولی می‌توان $n=1$ پس مشتق اول $y=\sin x$ برابر است با $y'=\cos x$ با چک کردن $n=1$ در گزینه‌ها فقط گزینه ۴ صحیح است.

$$f(x)=xe^x\Rightarrow f^n(x)=e^x(n+x)$$

$$f(x)=\ln x\Rightarrow f^n(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$$ مهم

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}\Rightarrow f^n(x)=\frac{(-c)^{n-1}n!(ad-bc)}{(cx+d)^{n+1}}$$ مهم

اگر مشتق $n$ام را در $x=a$ خواستند کار ساده است. ابتدا $n=1$ قرار داده یعنی مقدار مشتق اول را به ازای $x=a$ بدست می‌آوریم و در گزینه‌ها $n=1$ و رد گزینه می‌کنیم. اگر جواب نداد $n=2$ و... ولی اگر مشتق دهم، بیستم، ... را خواستند باید فرمول‌ها را حفظ باشیم و یا با استفاده از مشتق‌گیری به روند مناسبی دست پیدا کنیم.